Gerbes com conexões

Eduardo de Carvalho Andrade

2022

Resumo: Gerbes com conexões vem mostrando um papel relevante em matemática e física, nesse artigo procuramos definir gerbes e mostrar sua relação com a cohomologia de Čech de grau 2. Além disso, definimos conexões em gerbes e mostramos alguns exemplos concretos.

1 introdução

Originalmente gerbes foram introduzidos como certos feixes de grupoides por Giraud, [4], e sua popularização em geometria veio através de Hitchin, [1], e Brylinski, [3]. A definição que usaremos aqui para gerbes foi introduzida por Murray, [7], que estava procurando uma maneira de geometria diferencial para descrever classes em $H^3(M, \mathbb{Z})$. Desde então, a teoria de gerbes vem sido desenvolvida, e várias aplicações de gerbes foram encontradas em matemática e física.

A relevancia de gerbes incluem os seguintes resultados: gerbes são modelos geométricos para twists da K-teoria, descrevem os B-campos e D-branas em teoria de cordas, e desempenham um importante papel em T-dualidade topológica. Gerbes com conexões descrevem varias anomalias em teoria quântica de campos. Além disso, gerbes com conexões em uma variedade M correspondem a certos fibrados de linhas com conexões no espaço de loops livres LM, e eles dão origem a teorias de campo de tipo bordismo suave em M. Gerbes também vem tendo importante papel na teoria de quantização geométrica.

Esse artigo está estrutarado da seguinte forma: Na seção 2 é apresentado uma breve revisão sobre a teoria de fibrados de linhas complexos e conexões nos mesmos.

Na seção 3, apresentamos o conceito de gerbes, introduzido por Murray, e o conceito de conexões em gerbes. Por fim, na seção 4 são apresentados alguns exemplos de gerbes com conexões.

2 Fibrado de Linhas

Nessa seção iremos relembrar alguns fatos sobre fibrados de linhas complexos. Seja M uma variedade suave conexa e $\mathscr{U} = \{U_i / i \in J\}$ uma cobertura aberta para M tal que toda interseção não vazia $U_{i_1 \ldots i_p} = U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ é contratil.

Um fibrado de linhas complexo L em M pode ser descrito essencialmente de duas formas

- Como um fibrado vetorial complexo de posto 1
- Como um conjunto de funções de transição $g_{ij} : U_{ij} \to U(1)$

Note que na segunda forma pensamos o fibrado de linhas como funções de transição de um $U(1)-$fibrado principal. Lembrando que g_{ij} satisfaz $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$ e a condição de cociclo de Čech $\delta g_{ijk} = g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ em U_{ijk}. Dois conjuntos de funções de transição g_{ij} e g'_{ij} definem fibrados de linhas equivalentes se, e somente se, existem funções $h_i : U_i \to U(1)$ tal que $g'_{ij}g_{ij}^{-1} = h_i^{-1}h_j$. Nesse caso dizemos que g_{ij} e g'_{ij} são cohomologos e $\delta h_{ij} = h_i^{-1}h_j$ é o cobordo que eles diferem. De fato, classes de equivalência de fibrados de linhas correspondem bijetivamente a classes de cohomologia do primeiro grupo de cohomologia de Čech $\check{\mathrm{H}}^1(M, U(1))$

2.1 Conexão no fibrado de linhas

Similarmente nós usamos duas maneiras equivalentes de descrever uma conexão em L: Como uma derivada covariante $\nabla : \Gamma(M, L) \to \Omega^1(M, \mathbb{C})$ ou como um conjunto de 1-formas locais $A_i \in \Omega^1(U_i)$. Para cada i a forma A_i é o pull-back da 1-forma de conexão associada a ∇ via a seção local $\sigma_i : U_i \to p^{-1}(U_i) \subset L$. Lembrando que os A_i satisfazem a regra

$$i(A_j - A_i) = d\ log\ g_{ij}$$

Dois fibrados de linhas g_{ij} e g'_{ij}, com conexões A_i e A'_i respectivamente, são equivalentes exatamente quando g_{ij} e g'_{ij} definem fibrados equivalentes como acima e

$$iA'_i = iA_i + d\ log\ h_i$$

Dado um fibrado de linhas, g_{ij}, com conexão A_i, nos podemos definir sua 2-forma de curvatura $F \in \Omega^2(M)$ por $F\,|_{U_i} = d\ A_i$. Lembrando que $\frac{[F]}{2\pi}$ é chamada classe de Chern do fibrado de linhas e é invariante pela escolha de conexão.

3 Gerbes

Assim como no caso do fibrado de linhas podemos definir um gerbe de duas maneiras equivalentes.

Definição: Um gerbe é dado por um conjunto de fibrados de linhas de transição Λ_{ij} em U_{ij} junto com uma seção nao nula (também chamada de trivialização) $\theta_{ijk} \in \Gamma(U_{ijk}, \Lambda_{ijk})$ do fibrado produto tensorial $\Lambda_{ijk} = \Lambda_{ij}\Lambda_{jk}\Lambda_{ki}$. Os fibrados de linha de transição devem satisfazer $\Lambda_{ji} \cong \Lambda_{ij}^{-1}$, onde a inversa é com respeito ao produto tensorial, e a condição de cociclo

$$\Lambda_{ijk} = \Lambda_{ij}\Lambda_{jk}\Lambda_{ki} \cong 1$$

onde o ultimo fibrado de linhas é o fibrado trivial sobre U_{ijk}. As trivializações devem satisfazer $\theta_{s(i)s(j)s(k)} = \theta_{ijk}^{\epsilon(s)}$, para qualquer permutação $s \in S_3$, onde $\epsilon(s)$ é o sinal de s, e a condição de cociclo

$$\delta\theta_{ijkl} = \theta_{jkl}\theta_{ikl}^{-1}\theta_{ijl}\theta_{ijk}^{-1} = 1$$

Observação: Para entender a ultima equação deve-se notar que em U_{ijkl} o produto tensorial de todos os fibrados de linhas envolvidos é identificado com o fibrado de linhas trivial, é claro módulo os isomorfismos fixos $\Lambda_{ji} \cong \Lambda_{ij}^{-1}$ e $\Lambda_{ij}\Lambda_{ij}^{-1} \cong 1$, e o isomorfismo canônico que reordena os fatores no produto tensorial. Isso é verdade porque todo fibrado de linhas aparece duas vezes no produto com sinal trocado. A última equação significa que o produto das seções tem que ser igual, módulo os isomorfismos acima, à seção canônica no fibrado de linhas trivial sobre U_{ijkl} (isto é, aquela que associa para cada $x \in U_{ijkl}$ o ponto $(x, 1) \in U_{ijkl} \times U(1)$).

Dois gerbes são ditos equivalentes se para cada $i \in J$ existe um fibrado de linhas L_i em U_i, tal que para cada $i, j \in J$ nós temos isomorfismos de fibrados

$$m_{ij} : L_j \to \Lambda'_{ij}\Lambda_{ij}^{-1} \otimes L_i$$

tais que

$$m_{ij} \circ m_{jk} \circ m_{ki} = \theta'_{ijk}\theta_{ijk}^{-1} \otimes id$$

em U_{ijk}. Chamaremos (L_i, m_{ij}) de um objeto.

3.1 Relação com a cohomologia de Čech

Para relacionar a definição de gerbe feita anteriormente com a cohomologia de Čech, temos que lembrar que todas as nossa interseções $U_{i_1...i_p} = U_{i_1} \cap ... \cap U_{i_p}$ são contráteis, então todos os fibrados de linhas acima são necessariamente equivalentes aos fibrados de linhas triviais. Isso significa que podemos escolher uma seção não nula σ_{ij} em Λ_{ij} para cada $i, j \in J$. Com respeito a essas seções nós agora temos $\theta_{ijk} = g_{ijk}\sigma_{ijk}$, onde nós temos $\sigma_{ijk} = \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}$ no produto tensorial dos fibrados de linhas. Pela definição feita anteriormente, podemos ver que g define um 2-cociclo de Čech, isto é, para todo $i, j, k, l \in J$ nós temos

$$\delta g_{ijkl} = g_{jkl}g_{ikl}^{-1}g_{ijl}g_{ijk}^{-1} = 1$$

em U_{ijkl}. Dados dois gerbes equivalentes $(\Lambda'_{ij}, \theta'_{ijk})$, $(\Lambda_{ij}, \theta_{ijk})$ e um objeto (L_i, m_{ij}) para $\Lambda'_{ij}\Lambda_{ij}^{-1}$, nos podemos também escolher uma seção não nula σ_i em L_i para cada $i \in J$. Isso nos fornece duas seções não nulas em $\Lambda'_{ij}\Lambda_{ij}^{-1} \otimes L_j$: $\sigma'_{ij}\sigma_{ij}^{-1}\sigma_j$ e $m_{ij} \circ \sigma_i$. Para cada $i, j \in J$ nos podemos pegar o quociente dessas seções que nos define uma função $h_{ij} : U_{ij} \to U(1)$ tal que para cada $i, j, k \in J$ nós temos

$$g'_{ijk}g_{ijk}^{-1} = \delta h_{ijk} = h_{jk}h_{ik}^{-1}h_{ij}$$

em U_{ijk}. Portanto, toda classe de equivalência de gerbes induz uma classe de cohomologia de Čech de grau 2, $\check{\mathrm{H}}^2(M, U(1))$. Hitchin, em [1], mostrou que a recíproca é verdadeira, concluindo que classes de equivalência de gerbes correspondem bijetivamente a elementos na cohomologia de Čech de grau 2.

4 Conexões em gerbes

Conexões em gerbes são definidas por dois conjuntos denominados aqui por 0-conexões e 1-conexões.
Definição: Seja $\mathscr{G}$ um gerbe dado por um conjunto de fibrados de linhas de transição Λ_{ij} e trivializações θ_{ijk}. Uma 0-conexão em $\mathscr{G}$ consiste de uma derivada covariante ∇_{ij} em λ_{ij} para cada $i, j \in J$ tal que para cada $i, j, k \in J$

$$\nabla_{ijk}\theta_{ijk} = 0$$

em U_{ijk}.
Observação: Aqui ∇_{ijk} é a derivada covariante no produto tensorial dos correspondentes fibrados de linhas induzida pelas derivadas covariantes nesse fibrados.

Dados dois fibrado de linhas, L e L', com conexões, ∇ e ∇',respectivamente, denotamos a conexão induzida em $L \otimes L'$ por $\nabla + \nabla'$, que é definida por

$$(\nabla + \nabla')\sigma \otimes \sigma' = \nabla\sigma \otimes \sigma' + \sigma \otimes \nabla'\sigma'$$

para quaisquer seções σ de L e σ' de L'. Também pedimos que $\nabla_{ij} + \nabla_{ji} = 0$ para todo $i, j \in J$.
Observação: Uma definição alternativa para uma 0-conexão é obtida pegando o pull-back de uma 1-forma de conexão associada a ∇_{ij} via σ_{ij} para cada $i, j \in J$.

Também podemos definir uma 0-conexão considerando $\mathscr{G}$ como sendo correspondente a um 2-cociclo g_{ijk} e escolhendo um logaritmo de g_{ijk}

Definição: Uma 0-conexão é definida por um conjunto de 1-formas $A_{ij} \in \Omega^1(U_{ij})$ tal que

$$i(A_{ij} + A_{jk} + A_{ki}) = -d\ log\ g_{ijk}$$

É claro nós assumimos que $A_{ji} = -A_{ij}$.

Definição: Uma 1-conexão em $\mathscr{G}$ é definida por um conjunto de 2-formas locais $F_i \in \Omega^2(U_i)$ tal que

$$F_j - F_i = \sigma_{ij}^* K(\nabla_{ij})$$

onde $K(\nabla_{ij})$ denota a curvatura de ∇_{ij}. Alternativamente nós temos

$$F_j - F_i = dA_{ij}$$

Podemos denotar dA_{ij} por F_{ij}.

Observação: Uma 0-conexão e uma 1-conexão em $\mathscr{G}$ juntas forma o que se chama conexão do gerbe, denotada $\mathscr{A}$.

Proposição: Todo gerbe (expresso sobre alguma cobertura aberta I) possui uma 0-conexão (expressa na mesma cobertura).

Prova: Denotaremos por $\mathscr{A}^q$ o feixe de q-formas complexas suaves em M. Portanto, é suficiente observar que o feixe $\mathscr{A}^1$ é "soft".
Para expandir: escolha uma conexão arbitrária ∇_{ij} para cada fibrado Λ_{ij}. Então em U_{ijk} nós encontramos

$$\nabla\theta = \eta \otimes \theta$$

para algum $\eta \in C^2(M; \mathscr{A}^1)$ com respeito a cobertura I.
Além disso, $\delta\eta = 0$. Isso poruqe nas interseções U_{ijkl} por definição $\delta\theta$ é igual a seção canonica *can*; mas a conexão induzida $\delta^2\nabla$ é necessiariamente zero em *can*, além disso $(\delta\nabla)\theta = 0$ nas interseções U_{ijk}. (Pode-se ver isso pegando bases locais, por exemplo.)
Agora escolha uma partição da unidade real suave ρ subordinada a I. Isso nos fornece η como um cobordo

$$\zeta_i^j := \sum_k \rho_k \ \eta_{ijk} \ \Rightarrow \ \delta\zeta = \eta$$

oferecendo-nos assim

$$\nabla' := \nabla - \zeta \ \Rightarrow \ \nabla'\theta = 0$$

como uma 0-conexão na cobertura dada. $\square$

Proposição: 1-conexões existem para quaisquer 0-conexões, na cobertura dada.

Prova: Assim como para 0-conexões uma partição da unidade é suficiente. $\square$

De uma maneira natural uma conexão em $\mathscr{G}$, $\mathscr{A}$, nos fornece uma noção de curvatura de $\mathscr{A}$ como sendo uma 3-forma, $G \in \Omega^3(M)$ que é definida por $G\mid_{Ui} = dF_i$.

Observação: Brylinski mostrou, em [3], que assim como para os fibrados de linhas a classe de cohomologia da curvatura, $[G]$, não depende da escolha das 0- e 1-conexões, e que qualquer 3-forma fechada G em M é uma curvatura para $\mathscr{G}$ se, e somente se , $\frac{[G]}{2\pi}$ é a imagem de uma classe em $H^3(M, \mathbb{Z})$. A classe de cohomologia $\frac{[G]}{2\pi}$ é chamada classe de Dixmier-Doudy do gerbe.

Dizemos que dois gerbes, $\mathscr{G}$ e $\mathscr{G}'$, com conexões,$\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$, respectivamente, são equivalentes quando $\mathscr{G}$ e $\mathscr{G}'$ são equivalentes como gerbes e $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$ são equivalentes como na definição a seguir.

Definição: Seja (L_i, m_{ij}) um objeto para a equivalência de $\mathscr{G}$ e $\mathscr{G}'$ e seja h_{ij} a cocadeia de Čech correspondente a esse objeto. Então, $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$ são equivalentes se para todo $i, j \in J$ existe uma conexão ∇_i em L_i tal que m_{ij} mapeia

$$\nabla_j \mapsto \nabla'_{ij} - \nabla_{ij} + \nabla_i$$

e tal que

$$F'_i = F_i + \sigma_i^* K(\nabla_i)$$

Observação: Equivalentemente isso significa que para todo $i \in J$ existe uma 1-forma $A_i \in \Omega^1(U_i)$ tal que

$$iA'_{ij} = i(A_{ij} + A_j - A_i) - d\ log\ h_{ij}$$

em U_{ij} e

$$F'_i = F_i + d\ A_i$$

em U_i.

5 Exemplos

Exemplo 1: Seja G um grupo de Lie e $1 \to U(1) \to \hat{G} \to G \to 1$ uma extensão central. Como se sabe, qualquer extensão central admite uma cisão. Isso significa que $\pi : \hat{G} \to G$ é um $U(1)-$fibrado principal localmente trivial. Dado um $G-$fibrado principal sobre M, denotado por P, na forma de suas funções de transição $g_{ij} : U_{ij} \to G$, nós podemos levantar essas funções de transição obtendo $\hat{g}_{ij} : U_{ij} \to \hat{G}$ (assumindo que a imagem de g_{ij} é suficientemente pequena para que a extensão central possa ser trivializada sobre ela). Em geral $\hat{g}_{ij}$ não definem um cociclo, mas $\pi(\delta\hat{g}_{ijk}) = \delta g_{ijk} = 1$ é claro, portanto nós temos $\delta\hat{g}_{ijk} : U_{ijk} \to ker\pi \cong U(1)$. De fato $\delta\hat{g}_{ijk}$ define um gerbe, pois $\delta^2 = 0$ sempre. Assim a obstrução para levantar P para um $\hat{G}-$fibrado principal define um gerbe.

Exemplo2: Seja $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ a esfera tridimensional e pegue $N = S^3 - \{(0,0,0,1)\}$ e $S = S^3 - \{(0,0,0,-1)\}$. A interseção $N \cap S$ é homotopicamente equivalente a S^2. Portanto, classes de equivalência de fibrados de linhas em $N \cap S$ são determinadas por classes de cohomologia em $H^2(S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Como não existe interseção de 3 elementos, qualquer fibrado de linhas em S^2 define um gerbe em S^3. Seja Λ_{NS} tal fibrado de linhas. Qualquer conexão A_{NS} em Λ_{NS} define uma 0-conexão no gerbe. Uma 1-conexão tambem é facil de obter, pois a 2-forma de curvatura de A_{NS}, que denotaremos por F_{NS} pode sempre ser extendida para S, pois S é contratil, e portanto podemos definir F_S como sendo essa extensão de F_{NS} e definindo F_N como zero.

Exemplo 3: Aqui consideraremos a relação entre gerbes e codimensão 3. Escolha uma coleção finita de pontos disjuntos $p_i \in X^3 \ : \ i \in I$ em alguma 3-variedade real X^3 (orientada). Escolha uma cobertura da forma $U_0 := X - \bigcup_{i \in I}\{p_i\}$ e U_i :=bolas abertas como vizinhança de p_i; tal que todos U_i, U_j são disjuntos: qualquer interseção par a par parece uma bola perfurada em torno de um dos pontos e não há interseções triplas.

Portanto, definimos um gerbe completamente colocando fibrados de linhas em $U_{0,i}$. é razoalvel escolhê-los para serem (isomorfos a) o fibrado de linhas monopolo padrão de grau 1 sobre a bola perfurada. Sem um meio de selecionar fibrados particularees dentro dessas classes de isomorfismos, pelo menos fixamos uma classe de equivalência de gerbes.

Dada uma escolha particular de fibrados, qualquer conexão em cada um deles é suficiente para fixar uma 0-conexão no gerbe.

Isso obviamente se extende a ciclos integrais arbitrário

$$R := n_i p_i \ \in \ C_0(X; \mathbb{Z})$$

em que, sobre um ponto ponderado, desejaríamos colocar fibrado de linhas Λ_{i0} de grau apropriado.

Proposição:A classe de Chern $c(\mathscr{G}) \in H^3(X; \mathbb{C})$ é o dual de Poincaré para

$$[R] \ \in \ H_0(X; \mathbb{C})$$

.

Prova: Escolha uma 0-conexão. Esta possui 2-formas de curvatura F em cada bola perfurada, de grau igual a multiplicidade n_i. Escolha uma partição da unidade: isso nos da uma 3-forma de curvatura suportada apenas nas bolas perfuradas

$$\Omega = d\rho_i \wedge F_{i0}$$

em cada U_i para $i \neq 0$. Mas agora

$$\int_X \Omega = \sum_{i \neq 0} (\int_{S^2} \frac{i}{2\pi} F_{i0} \int_{r=0}^{r_i} d\rho_i)$$

$$= \sum_{i \neq 0} n_i$$

como desejado.$\square$

References

[1] N. Hitchin. *Lectures on special Lagrangian submanifolds.* In School on Differential Geometry (1999), the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics.

[2] D. S. Chatterjee. *On Gerbs.* PhD thesis, University of Cambridge, 1998.

[3] J-W Brylinski. *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization*, volume 107 of Progress in Mathematics. Birkhauser, 1993.

[4] J.Giraud. *Cohomologie non-abelianne*, volume 179 of Grundl. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[5] M. Mackaay, R. Picken. *Holonomy and parallel transport for Abelian gerbes*, volume 170 of Advances in Mathematics, 2001.

[6] S. Bunk. *Gerbes in Geometry, Field Theory, and Quantization*, Complex Manifolds 8(1):150-182 (2021), special volume on Generalized Geometry

[7] M.K Murray. *Bundle gerbes.* J.London Math.Soc.,54:403-416, 1996.