

Grau de Leray-Schauder

Renato Borlino Casagrandi

Resumo Neste trabalho, foi apresentada a teoria do grau topológico de Leray-Schauder e o teorema do ponto fixo de Schauder. Para isto, foi feita uma breve introdução do grau topológico de Brouwer. Como aplicação, foi estudado um problema de equação diferencial ordinária não linear.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Grau topológico de Brouwer - uma revisão	2
3	Grau topológico de Leray-Schauder	3
3.1	Definição do grau e suas propriedades	3
3.2	Teorema do ponto fixo de Schauder	8
3.3	Uma aplicação a uma equação diferencial ordinária	12

1 Introdução

O grau topológico é uma ferramenta utilizada para estudar soluções de equações do tipo $f(x) = y$, para uma função f e um valor y em condições específicas. O grau de Brouwer, construído para funções entre espaços de mesma dimensão finita é bastante útil na demonstração de resultados topológicos conhecidos, como por exemplo o teorema da esfera cabeluda. O grau de Leray-Schauder é definido para uma classe de funções contínuas do tipo $F = I - T$, onde I é a identidade e T é uma função completamente contínua. Em sua construção é utilizado o grau de Brouwer e as suas propriedades são facilmente obtidas partindo da definição e das propriedades do grau de Brouwer. Dentre suas aplicações, estão problemas de bifurcação e de equações diferenciais não lineares. Neste projeto, foi estudado um problema de equação diferencial ordinária não linear.

2 Grau topológico de Brouwer - uma revisão

Considere uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ definida em um subconjunto Ω de \mathbb{R}^k e seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^k tal que $\bar{U} \subset \Omega$. Uma terna (f, U, y) é dita **admissível** quando a função f é própria em \bar{U} e $y \in \mathbb{R}^k$ é tal que $f(x) \neq y$ para todo $x \in \partial U$. Uma terna admissível (f, U, y) é dita **regular** se f é de classe C^∞ em U e y é um valor regular para a restrição $f|_{\bar{U}}$.

Definição 2.1 (Grau de Brouwer para ternas regulares). *Seja (f, U, y) uma terna regular, então o seu grau de Brouwer é definido pelo inteiro*

$$\deg_B(f, U, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} \text{sign}(df_x), \quad (2.1)$$

onde $\text{sign}(df_x)$ é o sinal do determinante da matriz df_x .

O grau de Brouwer de uma terna regular pode ser interpretado como uma “conta algébrica” das soluções da equação $f(x) = y$ em U .

A definição do grau para ternas (f, U, y) somente admissíveis (não necessariamente regulares) é feita por meio de aproximações da função f por uma função g e do valor y por um valor z , de forma que a terna (g, U, z) seja regular. Assim, utiliza-se o grau da terna (g, U, z) para definir o grau da terna (f, U, y) . O grau está bem definido, pois não depende da escolha de g e de z , se estes satisfazem as seguinte condições:

1. $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$, para todo $x \in U$, ($\varepsilon > 0$);
2. $|z - y| \leq \sigma$, ($\sigma > 0$);
3. $\varepsilon + \sigma < \text{dist}(y, f(\partial U))$.

Abaixo estão listadas as principais propriedades do grau de Brouwer.

Propriedade 2.2 (Normalização). *Seja $I : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ a função identidade em \mathbb{R}^k . Então*

$$\deg_B(f, \mathbb{R}^k, y) = 1 \quad (2.2)$$

para todo y em \mathbb{R}^k .

Propriedade 2.3 (Aditividade). *Seja (f, U, y) uma terna admissível e sejam U_1 e U_2 subconjuntos abertos e disjuntos de U tais que $f^{-1}(y) \cap U \subseteq U_1 \cup U_2$. Então*

$$\deg_B(f, U, y) = \deg_B(f, U_1, y) + \deg_B(f, U_2, y). \quad (2.3)$$

Definição 2.4 (Homotopia). *Sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^k e Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^k \times [0, 1]$. Considere uma função contínua $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ e uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$. A terna (H, U, α) é chamada de **homotopia de ternas**. Tal homotopia **une** as ternas $(H_0, U, \alpha(0))$ e $(H_1, U, \alpha(1))$, onde H_λ é a função parcial definida em $\Omega_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^k : (x, \lambda) \in \Omega\}$ com $H_\lambda(x) = H(x, \lambda)$. Se a função H é própria em $\bar{U} \times [0, 1] \subseteq \Omega$ e $H(x, \lambda) \neq \alpha(\lambda)$ para todo $(x, \lambda) \in \partial U \times [0, 1]$, então (H, U, α) é dita uma **homotopia admissível de ternas**. Se H e α são C^∞ , então (H, U, α) é dita uma **homotopia C^∞** .*

Propriedade 2.5 (Invariância homotópica). *Se (H, U, α) é uma homotopia admissível C^∞ e u e v ternas admissíveis, então*

$$\deg_B(H_0, U, \alpha(0)) = \deg_B(H_1, U, \alpha(1)). \quad (2.4)$$

Propriedade 2.6 (Propriedade da excisão). *Sejam (f, U, y) uma terna admissível e V um subconjunto aberto de U tais que $f^{-1}(y) \cap U \subseteq V$. Então, a terna (f, V, y) é admissível e*

$$\deg_B(f, V, y) = \deg_B(f, U, y). \quad (2.5)$$

3 Grau topológico de Leray-Schauder

3.1 Definição do grau e suas propriedades

Quando se trata de definir o grau topológico em dimensão infinita, pode-se pensar nas funções contínuas entre espaços de Banach reais ou, mais geralmente, entre espaços normados reais (ou espaços vetoriais topológicos localmente convexos).

Considere um espaço normado real X de dimensão possivelmente infinita, um subconjunto $\Omega \subseteq X$ e uma transformação $\phi : \Omega \rightarrow X$. Seja $U \subseteq X$ aberto em X tal que $\bar{U} \subseteq \Omega$ e considere um ponto $p \in X \setminus \phi(\partial U)$. Queremos definir uma função $\deg_{\mathcal{LS}}(\phi, U, p)$ com valores em \mathbb{Z} que satisfaça as seguintes propriedades:

- (i) $\deg_{\mathcal{LS}}(I, U, p) = 1$ se $p \in U$, onde I é a identidade em Ω ;
- (ii) se $\deg_{\mathcal{LS}}(\phi, U, p) \neq 0$, então $p \in \phi(U)$;
- (iii) se $H_t : \Omega \rightarrow X$ é uma homotopia contínua tal que $p \notin H_t(\partial U)$ para todo $0 \leq t \leq 1$, então $\deg_{\mathcal{LS}}(H_t, U, p)$ é independente de t .

O grau de Brouwer envolve as funções contínuas. Na tentativa de estender o grau para funções contínuas definidas em subconjuntos de espaços normados de dimensão infinita, encontra-se um obstáculo. Jean Leray demonstrou, por meio de um contraexemplo, que qualquer construção de grau que satisfizesse as propriedades de normalização, aditividade e de invariância homotópica seria incompatível com a propriedade de existência. Esta dificuldade motivou a busca de uma classe de funções contínuas mais restrita. Foram escolhidas as perturbações compactas da identidade, pela propriedade de que uma função compacta pode ser aproximada por uma sequência de funções com imagem de dimensão finita.

A seguir, serão apresentadas algumas definições e demonstrações de resultados importantes para que o grau de Leray-Schauder possa ser definido.

Definição 3.1. *Sejam E, F dois espaços normados reais e seja $M \subset E$. Dizemos que $T : M \rightarrow F$ é uma **transformação completamente contínua** se:*

- (i) T é contínua;
- (ii) $T(A)$ é relativamente compacto para todo $A \subset M$ limitado, i.e., $\overline{T(A)}$ é compacto para todo $A \subset M$ limitado.

*Se, além disso, $T(M)$ for relativamente compacto, então T é uma **transformação compacta**.*

Observação 1. *Note que se M é limitado e T é completamente contínua, então T é compacta.*

Definição 3.2. *Sejam E e F dois espaços normados reais e M um subconjunto de E . Uma transformação $T : M \rightarrow F$ é dita de **dimensão finita** se $T(M)$ está contido em um subespaço linear de E de dimensão finita.*

O grau de Leray-Schauder é definido para perturbações compactas da identidade $\phi = I - T$, onde T é uma transformação completamente contínua. Com

o intuito de utilizar o grau de Brouwer como auxílio, T é aproximada por uma transformação compacta de dimensão finita. O teorema abaixo é bastante conhecido na análise funcional e garante a existência de tais transformações auxiliares.

Teorema 3.3. *Sejam E, F dois espaços normados reais dotados com suas respectivas normas, $\|\cdot\|_E$ e $\|\cdot\|_F$. Seja $M \subset E$ limitado e seja $T : M \rightarrow F$ uma transformação compacta. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $T_\varepsilon : M \rightarrow F$ de dimensão finita tal que, para todo $x \in M$*

$$\|T(x) - T_\varepsilon(x)\|_F < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. Como T é compacta, então o conjunto $\overline{T(M)}$ é compacto. Note que $\overline{T(M)} \subset \bigcup_{p \in \overline{T(M)}} B_\varepsilon(p)$, então existem $p_1, \dots, p_k \in \overline{T(M)}$ tais que

$\overline{T(M)} \subset \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(p_i)$. Para cada $i = 1, \dots, k$, seja $m_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$m_i(x, \varepsilon) := \max\{0, \varepsilon - \|T(x) - p_i\|_F\}. \quad (3.2)$$

Em outras palavras, se $x \in M$ é tal que $T(x) \in B_\varepsilon(p_i)$, então $m_i(x, \varepsilon) = \varepsilon - \|T(x) - p_i\|_F$, caso contrário, $m_i(x, \varepsilon) = 0$. Sendo assim, defina a função $\theta_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\theta_i(x, \varepsilon) := \frac{m_i(x, \varepsilon)}{\sum_{j=1}^k m_j(x, \varepsilon)}. \quad (3.3)$$

Vamos provar que θ_i está bem definida e é contínua para $i = 1, \dots, k$. Para isso, note que

(a) $\sum_{j=1}^k m_j(x, \varepsilon) > 0$:

De fato, para cada $x \in M$ existe $1 \leq j_0 \leq k$ tal que $T(x) \in B_\varepsilon(p_{j_0})$, pois $\overline{T(M)} \subset \bigcup_{i=1}^k B_\varepsilon(p_i)$. Então $m_{j_0}(x, \varepsilon) > 0$ e, portanto, $\sum_{j=1}^k m_j(x, \varepsilon) > 0$;

(b) Para cada $i = 1, \dots, k$, temos que m_i é contínua em M , pois é composta de contínuas (a função norma e a função máximo são contínuas, bem como a função T);

(c) $\sum_{j=1}^k m_j(x, \varepsilon) > 0$ é contínua, pois é soma de contínuas.

Portanto, (a) implica que θ_i está bem definida em M e sua continuidade é obtida por (b) e (c). Agora, seja $T_\varepsilon : M \rightarrow F$ uma função definida por

$$T_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^k \theta_i(x, \varepsilon) p_i. \quad (3.4)$$

O conjunto $T_\varepsilon(M)$ está contido no espaço vetorial gerado por $\{p_1, \dots, p_k\}$, então T_ε é de dimensão finita. Além disso, T_ε é uma transformação contínua.

Note que $\sum_{i=1}^k \theta_i(x, \varepsilon) = 1$, então

$$T(x) - T_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^k \theta_i(x, \varepsilon) T(x) - \sum_{i=1}^k \theta_i(x, \varepsilon) p_i = \sum_{i=1}^k \theta_i(x, \varepsilon) [T(x) - p_i].$$

Logo,

$$\|T(x) - T_\varepsilon(x)\| \leq \sum_{i=1}^k \theta_i(x, \varepsilon) \|T(x) - p_i\| \leq \varepsilon,$$

pois se x é tal que $T(x) \in B_\varepsilon(p_i)$, então $0 < m_i(x, \varepsilon) \leq \varepsilon$ e, portanto, $\theta_i(x, \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{k\varepsilon}$. □

Observação 2. As transformações T_ε no teorema acima são compactas. Para demonstrar tal fato, basta seguir os seguintes passos:

1. Note que M é limitado e T é compacta, então $T(M)$ é um conjunto limitado;
2. Utilize o fato acima e a desigualdade em (3.1) para concluir que $T_\varepsilon(M)$ é limitado. Sendo assim, para todo $A \subset M$, tem-se que $\overline{T_\varepsilon(A)}$ é limitado e fechado;
3. Como $T_\varepsilon(A)$ está contido em um espaço vetorial real V de dimensão finita, então $\overline{T_\varepsilon(A)}$ é compacto, pois V é completo.

A base da construção do grau de Leray-Schauder é apresentada pelo próximo lema, cujo resultado permite estender o grau de Brouwer para funções contínuas entre espaços Euclidianos de dimensões diferentes. Se $m < n$, identificamos \mathbb{R}^m com o conjunto $\mathbb{R}^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n; x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$.

Lema 3.4. Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e $\phi \in C(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$, onde $m \leq n$. Seja $\psi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$\psi(x) = x + \phi(x) \quad (x \in \bar{U}).$$

Defina o conjunto $U^m = \mathbb{R}^m \cap U$ e a função χ como sendo a restrição de ψ ao conjunto $\mathbb{R}^m \cap \bar{U}$. Se $p \in \mathbb{R}^m \setminus \psi(\partial U)$, então

$$\deg_B(\psi, U, p) = \deg_B(\chi, U^m, p). \quad (3.5)$$

A seguir, é apresentada uma sequência de resultados necessários para a definição do grau- \mathcal{LS} .

Sejam X um espaço normado, $\Omega \subset X$ um subconjunto qualquer e $U \subset X$ aberto e limitado tal que $\bar{U} \subset \Omega$. Considere uma função $\phi : \Omega \rightarrow X$ da forma $\phi = I - T$, onde $T : \Omega \rightarrow X$ é completamente contínua. Seja $p \in X$ e suponha sempre que $p \notin \phi(\partial U)$. A função ρ denotará a distância induzida pela norma em X .

1. Seja $r = \rho(p, \phi(\partial U)) = \inf\{\|p - \phi(x)\|; x \in \partial U\}$. Então $r > 0$. A demonstração consiste em supor que a distância é nula e tomar uma sequência (x_n) em ∂U tal que $\phi(x_n) \rightarrow p$. Utilizando a compacidade de T , prova-se que $p \in \phi(\partial U)$, o que é uma contradição.
2. Seja ϵ tal que $0 < \epsilon < r$ e considere uma transformação $T_\epsilon : \bar{U} \rightarrow X$ de dimensão finita, como no teorema 3.3. Seja $S_\epsilon = \text{Span}(T_\epsilon(\bar{U}), p)$ o espaço normado de dimensão finita gerado por $T_\epsilon(\bar{U})$ e por p . Defina o conjunto $U_\epsilon := U \cap S_\epsilon$ e a função $\phi_\epsilon(x) = x - T_\epsilon(x)$ para $x \in \bar{U}$. Então $U_\epsilon \subset S_\epsilon$ é aberto e limitado e $\partial U_\epsilon \subset \partial U$, onde ∂U_ϵ é a fronteira de U_ϵ em S_ϵ . Além disso, $\phi_\epsilon(\bar{U}_\epsilon) \subset S_\epsilon$ e

$$\|x - T_\epsilon(x) - p\| \geq \|x - T(x) - p\| - \|T(x) - T_\epsilon(x)\| > r - \epsilon > 0. \quad (3.6)$$

Com isto, pode-se definir $\deg_B(\phi_\epsilon, U_\epsilon, p)$, onde $\phi_\epsilon = \phi_\epsilon|_{U_\epsilon}$. Para $U_\epsilon = \emptyset$, temos o grau nulo.

3. O grau $\deg_B(\phi_\epsilon, U_\epsilon, p)$ não depende de ϵ se $0 < \epsilon < r$.
4. Seja V um espaço de dimensão finita que contém S_ϵ , com $0 < \epsilon < r$ e defina $U_V := U \cap V$. Pelo lema 3.4, tem-se que $\deg_B(\phi_\epsilon, U_V, p) = \deg_B(\phi_\epsilon, U_\epsilon, p)$.

Com os resultados acima, foi possível definir o grau de Leray-Schauder para ϕ .

Definição 3.5 (Grau de Leray-Schauder). *Sejam X um espaço normado, $\Omega \subset X$ um subconjunto qualquer e $U \subset X$ aberto e limitado tal que $\bar{U} \subset \Omega$. Considere uma função $\phi : \Omega \rightarrow X$ da forma $\phi = I - T$, onde $T : \Omega \rightarrow X$ é completamente contínua. Seja $p \in X \setminus \phi(\partial U)$. Considere $\hat{\phi} = I - \hat{T}$, onde \hat{T} é definida em \bar{U} com imagem de dimensão finita tal que*

$$\|T(x) - \hat{T}(x)\| < \rho(p, \phi(\partial U)), \quad x \in \bar{U}. \quad (3.7)$$

Tome um espaço vetorial V de dimensão finita contendo o conjunto $\hat{T}(\bar{U})$ e o ponto p . Defina $U_V = U \cap V$ e defina

$$\deg_{\mathcal{LS}}(\phi, U, p) = \deg_B(\hat{\phi}, U_V, p). \quad (3.8)$$

Após definido o grau, foi possível demonstrar propriedades análogas às propriedades já obtidas para o grau de Brouwer, visto que este é utilizado para definir o grau- \mathcal{LS} .

3.2 Teorema do ponto fixo de Schauder

Alguns dos resultados mais importantes demonstrados a partir do grau de Leray-Schauder são teoremas de ponto fixo. Nesta seção foram estudados e demonstrados alguns destes teoremas. Do ponto de vista histórico, o teorema de ponto fixo de Schauder foi provado alguns anos antes da construção do grau, realizada por Leray e Schauder. Contudo, o grau fornece um método simples para a demonstração deste teorema, como veremos nesta seção.

Definição 3.6. *Um ponto $x \in S$ é dito **ponto fixo** de uma função $f : S \rightarrow S$ se*

$$f(x) = x. \quad (3.9)$$

Definição 3.7 (Propriedade do ponto fixo). *Seja X um espaço normado real. Um conjunto $S \subseteq X$ possui a **propriedade do ponto fixo** se toda função contínua $f : S \rightarrow S$ admite ponto fixo.*

Teorema 3.8. *Sejam X um espaço normado real e $S \subseteq X$ um conjunto fechado, limitado e convexo tal que $0 \in S^\circ$. Considere $\phi : S \rightarrow X$ uma transformação compacta tal que $\phi(S) \subseteq S$. Então ϕ tem um ponto fixo em S .*

Demonstração. A ideia é construir uma homotopia que une as funções $I - \phi$ e I , igualar os graus das ternas $(I - \phi, S^\circ, 0)$ e $(I, S^\circ, 0)$ de forma que $\deg_{\mathcal{L}S}(I - \phi, S^\circ, 0) = 1$ e concluir que existe um ponto fixo em S .

Seja $U := S^\circ$, então U é não vazio. Por uma propriedade de conjuntos convexos, $\bar{S}^\circ = \bar{S}$. Como S é fechado, então $\bar{S} = S$ e, portanto, $\bar{U} = S$. Consequentemente, temos que $\partial U = \partial S$. De fato,

$$\partial U = \bar{U} \setminus U^\circ = \bar{S} \setminus S^\circ = \partial S.$$

Sendo assim, considere a homotopia

$$H_t(x) = x - t\phi(x) \quad (x \in \bar{U}, 0 \leq t \leq 1).$$

Precisamos provar que $0 \notin H_t(\partial U)$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Suponha que $\phi(x) \neq x$ para todo $x \in \partial U$, ou seja, $0 \notin H_1(\partial U)$ (o outro caso encerraria a demonstração). Para $0 \leq t < 1$ e $x \in \partial U$, note que $t\phi(x) \in S^\circ = U$, pois a origem está em U e a imagem $\phi(S) \subseteq S$. Sendo assim, $0 \notin H_t(\partial U)$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Agora, considere $G_t(x) = t\phi(x)$, então G_t é uma homotopia de transformações compactas com $0 \notin (I - G_t)(\partial U)$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Pela propriedade da invariância homotópica, temos que

$$\deg_{\mathcal{L}S}(I - \phi, U, 0) = \deg_{\mathcal{L}S}(I, U, 0).$$

Como $\deg_{\mathcal{L}S}(I, U, 0) = 1$, então a propriedade da existência garante que existe $x \in U$ tal que $\phi(x) = x$. □

Os próximos teoremas têm como objetivo obter o mesmo resultado de (3.8), relaxando as hipóteses impostas sobre o conjunto S .

Teorema 3.9. *Sejam X um espaço normado real e $S \subseteq X$ um conjunto fechado e limitado com interior não vazio e considere $\phi : S \rightarrow X$ uma transformação compacta. Se existe $w \in S^\circ = U$ tal que, para todo $\lambda > 1$ e $x \in \partial U$,*

$$\phi(x) - w \neq \lambda(x - w), \quad (3.10)$$

então ϕ admite um ponto fixo.

Demonstração. Neste caso, utilizaremos uma homotopia para unir $I - \phi$ e $I - w$. Portanto, considere

$$H_t(x) = x - w - t(\phi(x) - w) \quad (x \in \bar{U}, 0 \leq t \leq 1).$$

Assim como na demonstração do teorema anterior, suponha que $0 \notin H_1(\partial U)$ (o outro caso encerra a demonstração). Além disso, note que $0 \notin H_t(\partial U)$ para todo $0 < t < 1$. De fato, suponha o contrário, então existem $x_0 \in \partial U$ e $0 < t_0 < 1$ tais que

$$\phi(x_0) - w = \frac{1}{t_0}(x_0 - w) \quad \left(\frac{1}{t_0} > 1\right),$$

o que contradiz a hipótese em (3.10). O caso para $t = 0$ também é válido, pois $x \in \partial U$ e $w \in S^\circ$, então $x \neq w$. Portanto, temos que $0 \notin H_t(\partial U)$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Pelas propriedades de invariância homotópica e translação, temos que

$$\deg_{\mathcal{L}S}(I - \phi, U, 0) = \deg_{\mathcal{L}S}(I - w, U, 0) = \deg_{\mathcal{L}S}(I, U, w).$$

Como $w \in U$, então $\deg_{\mathcal{L}S}(I, U, w) = 1$ e, portanto, ϕ admite um ponto fixo. \square

Definição 3.10 (Envoltório convexo). *Sejam X um espaço métrico e S um subconjunto de X . A intersecção de todos os subconjuntos convexos de X que contém S é chamada de **envoltório convexo** de S e é denotada por $\text{co}(S)$. O **envoltório convexo fechado** de S é a intersecção de todos os subconjuntos convexos e fechados de X que contém S e é denotado por $\overline{\text{co}}(S)$.*

Observação 3. *Os conjuntos $\overline{\text{co}}(S)$ e $\overline{\text{co}(S)}$ são iguais. De fato:*

1. *A inclusão $\overline{\text{co}}(S) \subset \overline{\text{co}(S)}$ é direta, pois o fecho de $\text{co}(S)$ é um convexo fechado que contém S e, portanto, contém $\overline{\text{co}}(S)$.*

2. Provemos a inclusão $\overline{co(S)} \subset \overline{co}(S)$: Note que $co(S) \subset \overline{co}(S)$, então basta aplicar a seguinte propriedade de fechos de conjuntos:

$$\text{Se } A \text{ é um conjunto fechado, então } B \subset A \iff \overline{B} \subset A.$$

Teorema 3.11 (Dugundji). *Seja S um subconjunto fechado de um espaço métrico X e seja L um espaço normado real. Então, toda função contínua $f : S \rightarrow L$ admite uma extensão contínua, $F : X \rightarrow L$, tal que $F(X) \subset co(f(S))$.*

A primeira versão do teorema acima foi demonstrada pelo matemático Heinrich Tietze (teorema de extensão de Tietze), afirmando que o resultado vale para funções $f : S \rightarrow E^n$, onde E^n é o espaço Euclidiano n -dimensional. James Dugundji demonstrou que a extensão vale para funções mais gerais, substituindo o espaço Euclidiano por qualquer espaço vetorial localmente convexo. Em (3.11) foi enunciada uma versão deste resultado que nos é conveniente.

Até aqui, foi necessário assumir que o interior do conjunto S é não vazio. Com o teorema de extensão de Dugundji, podemos retirar tal restrição.

Teorema 3.12 (Teorema do ponto fixo de Schauder). *Seja S um subconjunto não vazio, fechado, limitado e convexo de um espaço normado real X e seja $\phi : S \rightarrow S$ uma transformação compacta. Então ϕ admite ponto fixo.*

Demonstração. Como S é um conjunto limitado, então existe uma bola B centrada na origem contendo S . Considere a função identidade $I : S \rightarrow X$ sobre o conjunto S e note que $co(I(S)) = S$, pois $I(S) = S$ é convexo. Então o teorema (3.11) garante a existência de uma transformação contínua $r : \overline{B} \rightarrow S$ tal que $r|_S = I$. Agora, seja $\hat{\phi} : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ tal que $\hat{\phi} = \phi \circ r$, então $\hat{\phi}$ é uma transformação compacta, pois ϕ é compacta. Pelo teorema (3.8), $\hat{\phi}$ admite ponto fixo, i.e., existe $\xi \in \overline{B}$ tal que $\hat{\phi}(\xi) = \xi$. Porém, $\hat{\phi}(\overline{B}) \subset S$ implica que $\xi \in S$ e, como $r|_S = I$, concluímos que $\phi(\xi) = \xi$. \square

Corolário 3.13. *Sejam S como no teorema acima e $h : S \rightarrow S_1$ um homeomorfismo, onde $S_1 \subset X$. Se $\phi : S_1 \rightarrow S_1$ é uma transformação compacta, então ϕ admite um ponto fixo em S_1 .*

Demonstração. Se definirmos a função $\psi := h^{-1} \circ \phi \circ h$, então temos que ψ leva S em S e é compacta, pois ϕ é compacta e h é bijetora com inversa contínua. Pelo teorema (3.12), existe $x \in S$ tal que $\psi(x) = x$. Logo $y = h(x) \in S_1$ tal que $h^{-1}(\phi(y)) = x = h^{-1}(y)$, implicando que $y \in S_1$ e $\phi(y) = y$. \square

Corolário 3.14. *Um subconjunto convexo e compacto S de um espaço normado real X possui a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. Seja $\phi : S \rightarrow S$ uma função contínua, então ϕ é compacta. De fato, como S é compacto, então $\overline{\phi(S)}$ é compacto. Seja $A \subset S$ limitado, então $\overline{\phi(A)}$ é um fechado contido no compacto $\overline{\phi(S)}$, portanto é também compacto. Agora basta utilizar o teorema (3.12) e concluir que ϕ possui ponto fixo em S . □

3.3 Uma aplicação a uma equação diferencial ordinária

Nesta seção faremos uma aplicação da teoria do grau- \mathcal{LS} a um problema de equações diferenciais ordinárias não lineares.

Considere $a, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq c$ e o conjunto

$$X := \{x : [a, c] \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ é contínua} \}$$

tal que a norma dos seus elementos é dada por

$$\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in [a, c]\}.$$

Seja $g : [a, c] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e, dado $k > 0$, defina

$$b := a + \min\{c - a, \frac{k}{M}\},$$

onde M é definido como

$$M := \max\{|g(s, u)| : a \leq s \leq c, |u| \leq k\}.$$

O lema a seguir utiliza o teorema de Arzela-Ascoli.

Lema 3.15. *Considere a bola aberta $U = B_k(0)$ em X e a transformação $T : \overline{U} \rightarrow X$ definida por*

$$T(x)(t) := \int_a^t g(s, x(s)) ds, \quad a \leq t \leq b. \quad (3.11)$$

Então, T é uma transformação compacta.

Demonstração. Primeiramente, vamos demonstrar que T é contínua.

A função $g|_{[a,b] \times [-k,k]}$ é uniformemente contínua, pois g é contínua e o conjunto da restrição é compacto. Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(s, u) - g(s, v)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

para todo $s \in [a, b]$ e para todo $u, v \in [-k, k]$ com $|u - v| < \delta$. Agora, considere $x, y \in X$ tais que $\|x - y\| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T(y)(t)| &= \left| \int_a^t [g(s, x(s)) - g(s, y(s))] ds \right| \\ &\leq \int_a^t |g(s, x(s)) - g(s, y(s))| ds \\ &< \int_a^t \frac{\varepsilon}{b-a} ds \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \in [a, b]$. Portanto, temos que

$$\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon,$$

provando a continuidade de T . Provemos que $T(\bar{U})$ é relativamente compacto:

(i) $T(\bar{U})$ é limitado:

De fato, tome $x \in \bar{U}$, então $|x(t)| \leq k$ para $a \leq t \leq c$. Assim, temos que $|g(s, x(s))| \leq M$ para $a \leq s \leq c$.

Dado $a \leq t \leq b$,

$$|T(x)(t)| \leq \int_a^t |g(s, x(s))| ds \leq M(b-a).$$

(ii) $T(\bar{U})$ é equicontínuo:

Sejam $x \in \bar{U}$, $t_1, t_2 \in [a, b]$, então

$$|T(x)(t_1) - T(x)(t_2)| = \left| \int_{t_2}^{t_1} g(s, x(s)) ds \right| \leq M|t_1 - t_2|.$$

Sendo assim, considere $\varepsilon > 0$ qualquer e $|t_1 - t_2| < \frac{\varepsilon}{M}$, então

$$|T(x)(t_1) - T(x)(t_2)| \leq M|t_1 - t_2| < \varepsilon,$$

para todo $x \in \bar{U}$.

Assim, $\overline{T(\bar{U})}$ é limitado, fechado e equicontínuo. Pelo teorema de Arzela-Ascoli, $\overline{T(\bar{U})}$ é relativamente compacto. Para qualquer $A \subset \bar{U}$ limitado, temos que $\overline{T(A)}$ é compacto, pois é um fechado contido em um compacto. Assim, T é uma transformação compacta. □

Teorema 3.16. *A equação diferencial ordinária de primeira ordem*

$$\begin{cases} x' = g(t, x), & a < t < b \\ x(a) = 0 \end{cases}$$

admite uma solução $x \in C^1([a, b])$.

Demonstração. Utilizaremos o teorema 3.12 para provar que T possui um ponto fixo. Para isto, note que $T(\bar{U}) \subset \bar{U}$: de fato, por (i) e pela definição do ponto b , temos que

$$|T(x)(t)| \leq M(b - a) \leq M \frac{k}{M} = k$$

para todo $x \in \bar{U}$ e para todo $t \in [a, b]$. Portanto, existe $x \in \bar{U}$ tal que $T(x) = x$, ou seja,

$$x(t) = \int_a^t g(s, x(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

Note que como a função $s \mapsto g(s, x(s))$ é contínua em $[a, b]$, então a função $t \mapsto x(t)$, $t \in [a, b]$, é de classe C^1 . Portanto, vale que

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)), & a < t < b \\ x(a) = 0. \end{cases}$$

□

Referências

- [1] Fonseca, I., & Gangbo, W., *Degree theory in analysis and applications*. Oxford University Press, 1995.
- [2] Deimling, K., *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1985.
- [3] Lloyd, N. G., *Degree theory*. Cambridge University Press, 1978.