Homologia de Morse

Victor Marçon Pirozelli

IME-USP

19 de dezembro de 2022

Resumo

Funções de Morse

Definição

Seja V variedade $f : V \to \mathbb{R}$ suave. Dizemos que $p \in V$ é *ponto crítico* de f se $df_p = 0$. O conjunto dos pontos críticos de f é denotado por $\mathrm{crit}(f)$.

A *Hessiana de f* no ponto p é a forma bilinear simétrica dada por

$$d^2 f_p(X_p, Y_p) := X(Yf))$$

onde X, Y são campos estendendo $X_p, Y_p \in T_pV$.

Um ponto crítico p é dito *não-degenerado* se a $d^2 f_p$ for não-degenerada, e o *índice* de p, $\mathrm{ind}\, p$, é a dimensão do maior subespaço de T_pV em que $d^2 f_p$ é negativa-definida.

O Lema de Morse

Teorema

(Lema de Morse) Seja $c \in V$ ponto crítico não-degenerado de $f : V \to \mathbb{R}$. Então existe uma vizinhança U de c e um difeomorsfismo $\phi : (U, c) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(c) - \sum_{j=1}^{\mathrm{ind}(c)} x_j^2 + \sum_{j=\mathrm{ind}(c)+1}^{n} x_j^2$$

A vizinhança U é uma carta de Morse.

Obs.: Este teorema implica que se V é compacta $\mathrm{crit}(f)$ é finito.

O fluxo do gradiente

Se g é uma métrica Riemanniana para V, podemos considerar o campo $-\operatorname{grad} f$ em V, o *gradiente (negativo) de f*, com fluxo φ de forma que:

1. $-\operatorname{grad} f_p = 0 \iff p \in \operatorname{crit}(f)$.
2. Se $p \notin \operatorname{crit}(f)$, a função f é estritamente descrescente ao longo da linha de fluxo $t \mapsto \varphi^t(p)$.

Variedades estáveis e instáveis

Definição

Seja $c \in \mathrm{crit}(f)$. A *variedade estável de c* é o subconjunto de V

$$W^s(c) = \{p \in V : \lim_{t \to +\infty} \varphi^t(p) = c\}$$

A *variedade instável de c* é o subconjunto de V

$$W^u(c) = \{p \in V : \lim_{t \to -\infty} \varphi^t(p) = c\}$$

Variedades estáveis e instáveis

Definição

Seja $c \in \text{crit}(f)$. A *variedade estável de c* é o subconjunto de V

$$W^s(c) = \{p \in V : \lim_{t \to +\infty} \varphi^t(p) = c\}$$

A *variedade instável de c* é o subconjunto de V

$$W^u(c) = \{p \in V : \lim_{t \to -\infty} \varphi^t(p) = c\}$$

Proposição

Seja c ponto crítico da função de Morse $f : V \to \mathbb{R}$. Então $W^s(c)$ e $W^u(c)$ são subvariedades de V homeomorfas a discos abertos com

$$\dim W^u(c) = \text{codim}\, W^s(c) = \text{ind}(c)$$

Funções de Morse e Topologia

Seja V compacta e $f : V \to \mathbb{R}$ de Morse. Denote $V^a := f^{-1}([-\infty, a])$.

Teorema

Suponha que $f^{-1}([a, b])$ não contém nenhum ponto crítico de f. Então V^b é difeomorfa a V^a.

Se $f^{-1}([a, b])$ contém exatamente um ponto crítico p de f, de índice k, então V^b tem o tipo de homotopia do espaço obtido de V^a pela colagem de uma k-célula.

Resumo

Condição de Smale

Definition

Uma função de morse $f : V \to \mathbb{R}$ satisfaz a *condição de Smale* se suas variedades estáveis e instáveis se interceptam transversalmente, isto é:

$$p \in W^s(a) \cap W^u(b) \Rightarrow T_pV = T_pW^s(a) + T_pW^u(b)$$

para todos $a, b \in \mathrm{crit}(f)$. Dizemos que f é de *Morse-Smale*.

Condição de Smale

Definition

Uma função de morse $f : V \to \mathbb{R}$ satisfaz a *condição de Smale* se suas variedades estáveis e instáveis se interceptam transversalmente, isto é:

$$p \in W^s(a) \cap W^u(b) \Rightarrow T_pV = T_pW^s(a) + T_pW^u(b)$$

para todos $a, b \in \text{crit}(f)$. Dizemos que f é de *Morse-Smale*.

Obs.: O espaço das funções de Morse-Smale é denso em $C^\infty(V)$ (Teorema de Kupka-Smale).

Condição de Smale

Para $a, b \in \mathrm{crit}(f)$, denote por $\mathcal{M}(a, b)$ subconjunto de V:

$$W^u(a) \cap W^s(b) = \left\{ p \in V \mid \lim_{t \to -\infty} \varphi^t(p) = a \text{ e } \lim_{t \to +\infty} \varphi^t(p) = b \right\}$$

Condição de Smale

Para $a, b \in \text{crit}(f)$, denote por $\mathcal{M}(a, b)$ subconjunto de V:

$$W^u(a) \cap W^s(b) = \left\{ p \in V \mid \lim_{t \to -\infty} \varphi^t(p) = a \text{ e } \lim_{t \to +\infty} \varphi^t(p) = b \right\}$$

Proposição

Se $f : V \to \mathbb{R}$ é de Morse-Smale e $\mathcal{M}(a, b) \neq \emptyset$, então $\mathcal{M}(a, b)$ é uma subvariedade de V de dimensão $\text{ind}(a) - \text{ind}(b)$.
Em particular, $\mathcal{M}(a, b) = \emptyset$ se $\text{ind}(a) < \text{ind}(b)$.

O complexo de Morse

Seja, (V, g, f) variedade Riemanniana compacta com $f : V \to \mathbb{R}$ função de Morse-Smale. Denote $\text{crit}_k = \{c \in \text{crit}(f) : \text{ind}(c) = k\}$.

O complexo de Morse

Seja, (V, g, f) variedade Riemanniana compacta com $f : V \to \mathbb{R}$ função de Morse-Smale. Denote $\text{crit}_k = \{c \in \text{crit}(f) : \text{ind}(c) = k\}$.

Os *grupos de homologia de Morse* $H_i(V) = H_i(V, g, f)$ são os grupos de homologia do complexo de cadeias (C_k, ∂_k) que satisfaz:

$$C_k = \left\{ \sum_{c \in \text{crit}_k} a_c c : a_c \in \mathbb{Z}/2 \right\}$$

O complexo de Morse

Seja, (V, g, f) variedade Riemanniana compacta com $f : V \to \mathbb{R}$ função de Morse-Smale. Denote $\mathrm{crit}_k = \{c \in \mathrm{crit}(f) : \mathrm{ind}(c) = k\}$.

Os *grupos de homologia de Morse* $H_i(V) = H_i(V, g, f)$ são os grupos de homologia do complexo de cadeias (C_k, ∂_k) que satisfaz:

$$C_k = \left\{ \sum_{c \in \mathrm{crit}_k} a_c c : a_c \in \mathbb{Z}/2 \right\}$$

$$\partial_k(a) = \sum_{b \in \mathrm{crit}_{k-1}} n(a, b) b$$

onde $n(a, b)$ é o número mod 2 de *trajetórias* de $-\mathrm{grad}\, f$ entre a e b.

O complexo de Morse

Dois problemas:

1. $n(a, b)$ é finito?

O complexo de Morse

Dois problemas:

1. $n(a, b)$ é finito?
2. $\partial_k \partial_{k-1} = 0$, isto é

$$\sum_{c \in \mathrm{crit}_{k-1}} n(a, c) n(c, b) = 0$$

para $a \in \mathrm{crit}_k$ e $b \in \mathrm{crit}_{k-2}$

Contando trajetórias

$\mathbb{R}$ age livre e propriamente em $\mathcal{M}(a, b)$ por $t \cdot x = \phi^t(x)$.

Contando trajetórias

$\mathbb{R}$ age livre e propriamente em $\mathcal{M}(a, b)$ por $t \cdot x = \phi^t(x)$.

Denotamos o quociente por $\mathcal{L}(a, b)$. A dimensão dessa variedade é $\operatorname{ind}(a) - \operatorname{ind}(b) - 1$ e ela parametriza as *trajetórias* entre a e b.

Assim, $n(a, b) = |\mathcal{L}(a, b)|$.

Contando trajetórias

$\mathbb{R}$ age livre e propriamente em $\mathcal{M}(a,b)$ por $t \cdot x = \phi^t(x)$.

Denotamos o quociente por $\mathcal{L}(a,b)$. A dimensão dessa variedade é $\operatorname{ind}(a) - \operatorname{ind}(b) - 1$ e ela parametriza as *trajetórias* entre a e b.

Assim, $n(a,b) = |\mathcal{L}(a,b)|$.

Definimos ainda o conjunto das *trajetórias quebradas* entre a e b:

$$\overline{\mathcal{L}}(a,b) = \bigcup_{c_i \in \operatorname{crit}(f)} \mathcal{L}\left(a, c_1\right) \times \cdots \times \mathcal{L}\left(c_{q-1}, b\right)$$

Contando trajetórias

$\mathbb{R}$ age livre e propriamente em $\mathcal{M}(a, b)$ por $t \cdot x = \phi^t(x)$.

Denotamos o quociente por $\mathcal{L}(a, b)$. A dimensão dessa variedade é $\operatorname{ind}(a) - \operatorname{ind}(b) - 1$ e ela parametriza as *trajetórias* entre a e b.

Assim, $n(a, b) = |\mathcal{L}(a, b)|$.

Definimos ainda o conjunto das *trajetórias quebradas* entre a e b:

$$\overline{\mathcal{L}}(a, b) = \bigcup_{c_i \in \operatorname{crit}(f)} \mathcal{L}\left(a, c_1\right) \times \cdots \times \mathcal{L}\left(c_{q-1}, b\right)$$

Pela condição de Smale, os termos não-vazios são aqueles em que $\operatorname{ind}(c_i) \geq \operatorname{ind}(c_{i+1})$.

Contando trajetórias

Se $\mathrm{ind}(a) = \mathrm{ind}(b) + 1$, temos:

$$\overline{\mathcal{L}}(a, b) = \mathcal{L}(a, b)$$

Contando trajetórias

Se $\text{ind}(a) = \text{ind}(b) + 1$, temos:

$$\overline{\mathcal{L}}(a, b) = \mathcal{L}(a, b)$$

Se $\text{ind}(a) = \text{ind}(b) + 2 = k + 2$, temos:

$$\overline{\mathcal{L}}(a, b) = \mathcal{L}(a, b) \cup \left(\bigcup_{c \in \text{crit}_{k+1}} \mathcal{L}\left(a, c\right) \times \mathcal{L}\left(c, b\right) \right)$$

Contando trajetórias

Teorema

Dados $a, b \in \mathrm{crit}(f)$, *o conjunto* $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ *admite uma topologia de forma que seja uma compactificação de* $\mathcal{L}(a, b)$.

Além disso, se $\mathrm{ind}(a) = \mathrm{ind}(b) + 2 = k + 2$, $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ *é uma variedade compacta de dimensão 1 com bordo*

$$\bigcup_{c \in \mathrm{crit}_{k+1}} \mathcal{L}(a, c) \times \mathcal{L}(c, b)$$

Contando trajetórias

Teorema

Dados $a, b \in \mathrm{crit}(f)$, o conjunto $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ admite uma topologia de forma que seja uma compactificação de $\mathcal{L}(a, b)$.

Além disso, se $\mathrm{ind}(a) = \mathrm{ind}(b) + 2 = k + 2$, $\overline{\mathcal{L}}(a, b)$ é uma variedade compacta de dimensão 1 com bordo

$$\bigcup_{c \in \mathrm{crit}_{k+1}} \mathcal{L}(a, c) \times \mathcal{L}(c, b)$$

Corolário

Para $a \in \mathrm{crit}_{k+1}(f)$ e $b \in \mathrm{crit}_k$, $n(a, b)$ é finito.

Contando trajetórias

Teorema

Dados $a, b \in \mathrm{crit}(f)$, o conjunto $\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ admite uma topologia de forma que seja uma compactificação de $\mathcal{L}(a,b)$.

Além disso, se $\mathrm{ind}(a) = \mathrm{ind}(b) + 2 = k + 2$, $\overline{\mathcal{L}}(a,b)$ é uma variedade compacta de dimensão 1 com bordo

$$\bigcup_{c \in \mathrm{crit}_{k+1}} \mathcal{L}(a,c) \times \mathcal{L}(c,b)$$

Corolário

Para $a \in \mathrm{crit}_{k+1}(f)$ e $b \in \mathrm{crit}_k$, $n(a,b)$ é finito.

Demo.: $\mathcal{L}(a,b)$ é uma variedade de dimensão 0, e $\overline{\mathcal{L}}(a,b) = \mathcal{L}(a,b)$ é compacto. Logo $\mathcal{L}(a,b)$ é uma união finita de pontos.

Contando trajetórias

Corolário

Para $a \in \mathrm{crit}_{k+2}$ *e* $b \in \mathrm{crit}_k$

$$\sum_{c \in \mathrm{crit}_{k-1}} n(a,c)n(c,b) = 0$$

Contando trajetórias

Corolário

Para $a \in \text{crit}_{k+2}$ *e* $b \in \text{crit}_k$

$$\sum_{c \in \text{crit}_{k-1}} n(a,c)n(c,b) = 0$$

Demo.: Temos que

$$\left| \bigcup_{c \in \text{crit}_{k+1}} \mathcal{L}(a,c) \times \mathcal{L}(c,b) \right| = |\partial \overline{\mathcal{L}}(a,b)| = 0 \mod 2$$

Conclusão

Assim, o complexo de Morse (C_k, ∂_k) é de fato um complexo de cadeias bem-definido.

Conclusão

Assim, o complexo de Morse (C_k, ∂_k) é de fato um complexo de cadeias bem-definido.

Obs.: Pode-se construir homologia de Morse com coeficientes em $\mathbb{Z}$ considerando-se orientações nos $\mathcal{L}(a, b)$ com $\mathrm{ind}(a) = \mathrm{ind}(b) + 1$, definindo $n(a, b)$ como a soma dos sinais dados pelas orientações em cada ponto.

Caráter topológico

Teorema

Sejam g_1, g_2 métricas para V e f_1, f_2 funções de Morse-Smale em (V, g_1) e (V, g_2), respectivamente. Então existe um morfismo de complexos de cadeias induzindo isomorfismos

$$H_k(V, g_1, f_1) \cong H_k(V, g_2, f_2)$$

Caráter topológico

Teorema

Sejam g_1, g_2 métricas para V e f_1, f_2 funções de Morse-Smale em (V, g_1) e (V, g_2), respectivamente. Então existe um morfismo de complexos de cadeias induzindo isomorfismos

$$H_k(V, g_1, f_1) \cong H_k(V, g_2, f_2)$$

Teorema

Uma função de Morse-Smale $f : V \to \mathbb{R}$ induz uma decomposição celular em V e um isomorfismo entre sua homologia de Morse e sua homologia celular.

Michele Audin, Mihai Damian, and Reinie Erné.
Morse theory and Floer homology.
Springer, 2014.